

Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht

DER MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE UNTERRICHT



Organ des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V.

Schriftleitung:

Hauptschriftleitung
und Mathematik:

OStD a. D. HERBERT NOACK
Feldstr. 108, 2300 Kiel, (0431) 85596

Physik:

MinR HERWIG KRÜGER
Untereissener Str. 33, 2305 Heikendorf,
(0431) 241538

Chemie:

StD OTTHEINRICH DÜLL
Breidenbornerstr. 8, 6750 Kaiserslautern,
(0631) 2883

Biologie:

Prof. Dr. KARL-HEINZ BERCK
Institut für Biologiedidaktik der Universität
Gießen, Karl-Glückner-Str. 21 C, 6300 Gie-
ßen

Verlag:

FERD. DÜMMLER VERLAG, Postfach 1480; Kaiserstraße 31-37
(Dümmlerhaus), 5300 Bonn 1, Telefon 02 28/22 30 31 und
HIRSCHGRABEN-VERLAG GmbH., Fürstenbergstraße 223,
6000 Frankfurt am Main. Druck: Boss-Druck, Kleve
Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Ver-
lage (federführend ist Dümmler, Bonn).

Anzeigen- und Beilagenverwaltung:

durch den federführenden Verlag:

FERD. DÜMMLER* VERLAG, Postfach 1480; Kaiserstraße
31-37 (Dümmlerhaus), 5300 BONN 1, Telefon 02 28/22 30 31.
Anzeigen- und Beilagenpreise gemäß Tarif Nr. 20 vom 1. 1. 1981.
Für Stellengesuche und Behördenanzeigen gilt ein vergünstigter
Tarif. Anzeigenschluß jeweils 4 Wochen vor Erscheinen.

Erscheinungsweise:

8mal jährlich mit je 64 Seiten Umfang: Zum 15. Jan./1. März/
15. April/1. Juni/15. Juli/1. Sept./15. Okt./1. Dez.

Bezugsbedingungen:

Pro Jahrgang 8 Hefte = 512 Seiten plus 8 Seiten Jahresinhalts-
verzeichnis: DM 64,-, Einzelheft DM 10,-, zuzüglich Ver-
sandspesen. Hefte früherer Jahrgänge zu gleichem Preis teil-
weise noch lieferbar.

Vorzugspreis für Studenten gegen Studienbescheinigung
DM 51,20 (nur direkt vom Verlag).

Für Mitglieder des Fördervereins ist der Bezugspreis im
Vereinsbeitrag enthalten (vgl. letzte Textseite dieses Heftes).

Einbanddecken: auch früherer Jahrgänge jeweils DM 6,80.

Eine Kündigung des Jahresabonnements kann nur anerkannt
werden, falls die Kündigung mindestens 6 Wochen vor Jahres-
ende beim Verlag vorliegt.

Anschriftenänderungen bitte rechtzeitig dem Dümmler
Verlag (nicht dem Geschäftsführer des Fördervereins und nicht
der Post) mitteilen. Bei Anschriftenänderungen, die nicht min-
destens 4 Wochen vor Erscheinen des nächsten Heftes Dümmler
gemeldet sind, kann bei Verlust Ersatz nur gegen Berechnung
gestellt werden, da die Post Zeitschriften weder nachsendet noch
an die Verlage zurückgibt.

Besprechungsstücke: nur an die zuständigen Fachschrift-
leiter. Für unverlangte Sendungen besteht keine Verpflichtung
zur Rezension bzw. zur Erwähnung, noch wird eine Haftung
oder Rücksendungsverpflichtung übernommen. **Namentlich**
gekennzeichnete Beiträge geben nicht unbedingt in jedem Falle
die Meinung der Schriftleitung und des Verlages wieder.

DEUTSCHER VEREIN ZUR FÖRDERUNG DES MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHTS E. V.

Der Verein ist durch Verfügung des Finanzamtes für Körperschaften in Hamburg als gemeinnützig anerkannt.

Ehrenvorsitzender: OStD Prof. Dr. FR. MUTSCHELLER,
Damaschkestr. 46, 7500 Karlsruhe 1. (0721) 73886

1. Vorsitzender: OStD A. KLEIN, Stachelsweg 28, 5000
Köln 91. (0221) 862261

2. Vorsitzender: StD H. LOCHHAAS, Ringstr. 105, 6101
Roßdorf über Darmstadt. (06154) 9281

Geschäftsführer: StD FRIEDR. BECKER, Bielfeldstr. 14,
2000 Hamburg 50. (040) 8806781. Postscheckkonto:
Deutscher Verein zur Förderung des
mathematischen und naturwissen-
schaftlichen Unterrichts. Hamburg
439 19-202

Beisitzer: StD F. BARTH, Abbachstr. 23, 8000 München
50. (089) 1413646 (Mathematik)
OStD P. WESSELS, Arensburgstr. 28, 2800 Bre-
men. (0421) 443703 (Physik)
StD H. WAMBACH, Vogelsanger Str. 61, 5000
Köln 30. (0221) 513878 (Chemie)
OStR K. THAMERUS, Am Eichelgarten 19,
7500 Karlsruhe. (0721) 386373 (Biologie)
OStD a. D. H. NOACK, Feldstr. 108, 2300 Kiel.
(0431) 85596
StD D. POHLMANN, Ollnsstr. 127, 2200 Elms-
horn. (04121) 62160 (Information und Aus-
kunftsdienst)

Geschäftsjahr ist das Kalenderjahr. Der Eintritt kann
jederzeit erfolgen. Der Beginn der Mitgliedschaft rechnet
je nach Wunsch des Eintretenden vom 1. Januar oder 1. Juli
an. Der Austritt ist nur zum 31. Dezember möglich und
muß bis zum 1. Oktober dem Geschäftsführer gemeldet
werden. Schulen und Hochschulinstitute können nicht Mit-
glied werden.

Der Jahresbeitrag beträgt DM 52,- (für Pensionäre DM
42,-); in ihm ist die Belieferung mit der Zeitschrift »Der
mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht«
eingeschlossen. Studenten und Studienreferendare, Assesso-
ren, Hochschulassistenten und Junglehrer, die noch nicht
die volle tarifliche Besoldung erhalten, bezahlen nur

DM 32,- Jahresbeitrag, wenn sie darüber eine mit
dem Stempel der Schulleitung oder der Hochschule ver-
sehene Bescheinigung dem Geschäftsführer einreichen.

Der Jahresbeitrag ist bis zum 1. Juni im ganzen zu zah-
len. Später noch ausstehende Beträge werden zuzüglich
der Kosten der Einziehung durch Postnachnahme erho-
ben.

An- und Abmeldungen sind nur an den Geschäftsführer
zu richten. Adressenänderungen müssen spätestens 4 Wo-
chen vor Erscheinen beim Dümmler Verlag vorliegen (alte
und neue Adresse). Da die Post Zeitschriften nicht nach-
sendet, sondern vernichtet, kann verlagsseits Ersatz nur
gegen Berechnung geleistet werden.

INHALTSVERZEICHNIS

ABHANDLUNGEN – BEITRÄGE ZUR SCHULPRAXIS

Mathematik

BAPTIST, P.: Berechnung komplexer Wurzeln mit dem Taschenrechner	278	– Stetige Gruppenhomomorphismen	466
BECK, U.: Eine reale Problemsituation und die Behandlung verschiedener Funktionstypen	148	VETTER, W.: Zum Analogon des Satzes von Morley in der isotropen Geometrie	330
BETTEN, D.: Der Satz von Miquel als räumlicher Dreispiegelungssatz	385	ZIEBECK, G.: Zur Lage des mathematischen Unterrichts: Ist die Schulmathematik schülergerecht?	458
FIEDLER, F.: Der Satz des Menelaos. Eine mathematikgeschichtliche Notiz	95		
FRITSCH, R.: »Dreiecks«-Ungleichungen für Tetraeder	274		
HAYEN, J.: Zum Beweisen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I	11		
HERING, H.: Spezialisierung des Spencerschen Lemmas in didaktischer Sicht	202		
HERTENBERGER, R.: Kartenzauber und Mathematik	16		
HEUSER, M.: Ägyptische Multiplikation und Division	152		
JAHNKE, TH.: Monotone Ungleichungen	91		
LEHMANN, E.: Markow-Ketten in der Sekundarstufe I	460		
MEYER ZUR CAPELLEN, W.: Über Zahlen, deren reziproken Werte die gleichen Ziffernfolgen nach dem Komma wie diese selbst haben	17, 243		
NÖBAUER, W.: Geschichte der Mathematik im Mathematikunterricht	87		
RÜTHING, D.: Der Vektorraum der Pascal-Dreiecke	333		
SCHMIDT, G.: Zur Lage des mathematischen Unterrichts: Die Grundkursproblematik	388		
SCHÖNBECK, J.: Zum Satz des Menelaos	488		
SCHUPP, H.: Zum isometrischen Problem für Dreiecke und Vierecke	432		
STEINBERG, G.: Von $f: x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ zum Satz von Darboux. Eine konstruktive Vertiefung im Analysisunterricht	395		
STRICK, H. K.: Die Bestimmung von Konfidenzintervallen im Grundkurs Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik	7		
– Der Chi-Quadrat-Anpassungstest im Mathematik- und im Biologieunterricht der Sekundarstufe II	139		
STROHHÄCKER, E.: Exemplarisches Lernen an linearen Rekursionsformeln	213		
TSCHAMPEL, L.: Tangentiale Abweichung bei Parabeln	211		
– Mathematik und Informatik	304		

Physik

BACKHAUS, U. – SCHLICHTING, H.-J.: Die Unumkehrbarkeit natürlicher Vorgänge – Phänomenologie und Messung als Vorbereitung des Entropiebegriffs	153
– Die Einführung der Entropie als Irreversibilitätsmaß – Begriffsbildung und Anwendung auf einfache Beispiele	282
BÄUERLE, H.-G. – DRESBACH, B. – HARREIS, H.: Netzplantechnische Analyse einer Unterrichtseinheit zur schrittweisen Erarbeitung des Fermat-Prinzips	401
BERGE, O. E.: Die Schmelztemperatur des Eises	28
BIENLEIN, J. K.: Systematik der Elementarteilchen	65
BRUNSMANN, U. – SCHARMANN, A. – THEISS, G.: Ein Experiment zur Schalenstruktur der Atome	217
DANIELS, A.: Gekoppelte Schwingungen unter dem Aspekt der Eigenschwingungen eines Systems	26
EVERTS, H.-U.: Eindimensionale Metalle	193
LENZ, J. – SCHOBLIK, F.: Zur mathematisch-quantitativen Behandlung freier gedämpfter Schwingungen im Schulunterricht	338
SAUER, G.: Arbeitsmaterial zur Relativitätstheorie und Teilchenphysik im Physikunterricht	97
SAUR, E. J.: Ein Miniatur-Luftverflüssiger für Demonstrationszwecke	345
SCHERLENZKY, CH.: Anmerkung zu der Abhandlung »Die Mathematik in der physikalischen Größenlehre« von G. Oberdorfer (MNU 33 (1980) 193)	175
WELTNER, K.: Naturwissenschaft und Technik: Überschneidungen und Abgrenzungen – aus der Sicht des Physikunterrichts	449
WODE, D.: Zum Schwimmverhalten einer quadratischen Säule	18

Chemie

BÖDEKER, U.: Dampfdruckmessungen mit einfachen Mitteln und Anwendung des Gesetzes von Raoult	170
--	-----

DIERKS, W.: Das Verwenden der Anzahl beim stöchiometrischen Rechnen mit Größengleichungen und bei der Symbolisierung quantitativer Reaktionen	29
HARTEN, H.-U.: Über die Schwierigkeiten im Umgang mit dem Mol	433
HERBERS, R.: Farbe, Farbigkeit, Farbstoff. Ein didaktisches Konzept für die SII	160
JANSEN, W. — FLINTJER, B.: Der Reaktionsmechanismus der Reaktionen von Ethen mit Brom und mit Bromwasser — Beispiel einer problemorientierten Unterrichtskonzeption	477
KIRNSTETTER, R. G. H.: Kronenether — eine Zufallsentdeckung und ihre Folgeentwicklung	78
NAY, U.: Zusammenhang zwischen Deutungen von chemischen Versuchen und Primärfähigkeit	165
NÖDING, S.: Nochmals: »Ist der Chemieunterricht in eine Sackgasse geraten?«	490
PRAMSCHÜFER, K.: Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen bei heterogenen Systemen	208
QUENTIN, K.-E.: Trinkwasserversorgung und Abwasserreinigung als aktuelle Thematik im naturwissenschaftlichen Unterricht	291
RALLE, B. — JANSEN, W.: Zur Reaktionskinetik in der Sekundarstufe II der Gymnasien. Die Hydrolyse von tert-Butylchlorid und der Reaktionsmechanismus dieser Reaktion	413
SAUER, J.: Das Prinzip der Hybridisierung — ein Diktat für den Kohlenstoff? Von »normalen« zu »pathologischen« Verbindungen des Kohlenstoffs	347, 488
SCHMIDT, H.-J.: Die Herleitung chemischer Formeln im Verständnis von Schülern	468
SEEL, F.: Bemerkung zu »Über die Schwierigkeiten im Umgang mit dem Mol«	434
SIMON, G.: Die Bedeutung der Geschichte der Chemie für die Erfassung der Grundbegriffe	100
WENINGER, J.: Änderungen in der chemischen Terminologie	271
— Kritisches zur Vornorm DIN 32 629 »Stoffportion; Begriff, Kennzeichnung«	391
WIEDERHOLT, E. — FAHRNEY, V.: Beschreibung eines einfachen Versuchsaufbaus zur Differenz-Thermoanalyse am Beispiel der Untersuchung von Kupfersulfat-Pentahydrat	104
ZITT, J.: Quantitative Synthese von Wasserdampf bei Zimmertemperatur	223

Biologie

BADE, L.: Überwinterung von <i>Helix pomatia</i> L. — Ein Unterrichtsmodell für die Sekundarstufe II	41
BEISENHERZ, W.: Das Kohlendioxidproblem als Thema des fächerübergreifenden Biologieunterrichts	423
BINDER, K.: Psychologische Aspekte zahnmedizinischer Prophylaxe	428
BIRETT, H.: Bemerkungen zu Kattmanns Beitrag: Zur kybernetischen Beschreibung von Biosystemen	175
BREIDING, R.: Transportmechanismen der Zelle — Versuche für den Biologieunterricht	302
ERBER, D. — GÖTTERT, E.: Biologieunterricht im Naturkundemuseum — Eine Untersuchung zum Stand der Museumspädagogik	129
FRÄNZ, D.: Pflegeleichte Topfkulturen in der Schule	236
FRÄNZ, J.: Genetische Aspekte der Krebserkrankungen und der Krebstherapie	265
HÄFNER, P.: Ein Versuch zur quantitativen Bestimmung des CO ₂ -Gaswechsels grüner Pflanzen	109
KAUFMANN, M.: Der Einsatz des Handmikrotoms im Biologieunterricht der gymnasialen Oberstufe	233
KLEFFMANN, S.: Temperaturregulation beim Menschen — ein Experiment zur Einführung des Regelkreises in Klasse 10	173
PFISTERER, J.: Schulversuche zum Schwarmverhalten von Fischen	480
SCHMIDT, F.: Prävention des Rauchens als integrierender Bestandteil der Gesundheitserziehung in Schulen	83
WOLF, B. — BURGER, A.: Demonstration des Primäreffektes der Photosynthese	228
WUKETITS, F. M.: Die Systemtheorie der Evolution — eine neue Sehweise der Entwicklung des Lebendigen	1
— Neue Aspekte der Evolutionstheorie im Biologieunterricht der Sekundarstufe II	358

Allgemeines

BAUER, F. L.: Muß abstrakt unverständlich sein? Die Rolle der Formalisierung, gezeigt an Beispielen aus der Informatik	257
KLEIN, A.: Begrüßungsansprache auf der Festsitzung	321
SCHULTEN, R.: Kernenergie — gestern, heute und morgen. Festvortrag	324

MITTEILUNGEN

Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts

Vorstandssitzung in Düsseldorf, 4. und 5. Oktober 1980	49
Beitragszahlung 1981	50
Reisestipendium des Fördervereins zum Deutschen Museum in München	52
7. Fachleitertagung für Biologie	113
Bericht über die 7. Fachleitertagung für Mathematik	244
73. Hauptversammlung Ostern 1982 in Berlin	245, 306, 369
8. Fachleitertagung Chemie 1980	305
7. Fachleitertagung für Biologie 1981	307
Bericht über die 72. Jahreshauptversammlung vom 12. bis 16. April 1981 in Düsseldorf	363
Mitgliederversammlung auf der 72. Hauptversammlung in Düsseldorf am 15. 4. 1981	368
Kassenbericht 1980	369
Brief des 1. Vorsitzenden an den Bundespräsidenten	370

Aus den Landesverbänden

Bremen: Bezirksgruppe Bremerhaven	370
Hessen	306
Nordrhein	50, 306
Saar	52
Schleswig-Holstein	51, 306
Westfalen	306

Persönliches

KRÜGER, H.: Robert-Wichard-Pohl-Preis für Professor Dr. Karl Hecht	307
KULL, U.: Zum Tode von Prof. Dr. Hermann Linder	113
LANGE, H.: Wolfgang Corbach zum 75. Geburtstag	371
POHLMANN, D.: Hermann Athen zum 70. Geburtstag	243
VORSTAND: Hermann Athen †	436

Allgemeines

DEUTSCHE MATHEMATIKER-VEREINIGUNG: Das Berufsbild des Diplom-Mathematikers	435
--	-----

GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER CHEMIE UND PHYSIK: Didaktik der Chemie und Physik in der Lehrerausbildung. Stellungnahme	114
--	-----

GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK: Memorandum der GDM zur fachdidaktischen Ausbildung der Mathematiklehrer	245
---	-----

– Stellungnahme der GDM zur Einbeziehung von Inhalten und Methoden der Informatik in den Mathematikunterricht der SI und in die Hochschulausbildung von Mathematiklehrern.	494
--	-----

JODL, H.: Fachdidaktische wissenschaftliche Hausarbeiten an den Fachbereichen Physik deutscher Hochschulen	177
--	-----

SÄCKL, H.: Ein Eingangstest zur Mathematik für Naturwissenschaftler	492
---	-----

SCHNEIDER, F.: Lohnt sich ein Physikstudium?	116
--	-----

Tagungen, Veranstaltungen

ENGEL, A.: XXII. Internationale Mathematik-Olympiade	496
--	-----

HEISE, H.: XII. Internationale Physik-Olympiade	498
---	-----

KÜSTER, J.: 16. Bundeswettbewerb »Jugend forscht«	434
---	-----

SCHMIDT, H.-J.: Jahrestagung der Association for Science Education in Warwick	176
---	-----

THAMERUS, K.: Studienwoche der Vereinigung schweizerischer Gymnasiallehrer	52
--	----

TROMMER, G.: Bericht über die internationale Ökologentagung der Gesellschaft für Ökologie und des 2. Europäischen ökologischen Symposiums in Berlin	178
---	-----

UNTERBRUNNER, U.: Öko-Humana 1980. Bericht über eine internationale Tagung	117
--	-----

WELTNER, K.: Naturwissenschaft und Technik im Unterricht	496
--	-----

Tagungsankündigungen	53, 178, 247, 307, 308, 436
--------------------------------	-----------------------------

Kurzberichte, Hinweise

Jungner-Preis für Mikrofotografie des VDB	52
---	----

Kostenlose Ausleihe eines Naturschutz-Filmes	178
--	-----

Mathematik-Wettbewerbe in Schulen	436
---	-----

Hinweise zur Umwelterziehung	500
--	-----

Ausschreibungen: Karlson-Preis 1982, Hörlein-Preis 1982	500
---	-----

BESPRECHUNGEN

Zeitschriften

DÜLL, O.: Chemie	
Oktober 1980 bis März 1981	248
April bis September 1981	501
ERBER, D.: Biologie	
April bis September 1980	53
ERBER, D. — GÖTTERT, E. — WEISS, J.: Biologie	
Oktober 1980 bis März 1981	308
KRÜGER, H.: Physik	
Juli bis Dezember 1980.	179
Januar bis Juni 1981	436
NOACK, H.: Mathematik	
Juli bis Dezember 1980.	119
Januar bis Juni 1981	371

Bücher

Mathematik

ANDELFINGER, B. — HERTKORN — HORN — MARKERT:	
Medien und Lehrziele	187
ATHEN, H. — BRUHN, J. (Hrsg.): Lexikon der Schul-	
mathematik	443
ATKINSON, K. E.: An Introduction to Numerical Ana-	
lysis	507
BERZ, E.: Infinitesimalrechnung, Bd. 1, 2. Für Mathe-	
matiker, Naturwissenschaftler und Techniker ab	
1. Semester	62
BOTSCH, O.: In der Werkstatt der Hirnverzwirner . .	315
BRENNER, J. — LESKY, P. — VOGEL, A.: Wahrschein-	
lichkeitsrechnung und Statistik. Didaktische Mate-	
rialien für Grund- und Leistungskurse	508
BROMM, K. U.: Programmierbare Taschenrechner in	
Schule und Ausbildung. Grundlage und Anwendun-	
gen des Programmierens. Mit über 50 Programmen .	316
CHRISTMANN, N.: Einführung in die Mathematik-Di-	
daktik	508

DUDLEY, U.: Elementary Number Theory. 2. Aufl. . .	186
ENGEL, W. — PIRL, U.: Mathematische Olympiade-	
Aufgaben	507
GARDNER, M.: Mathematisches Labyrinth	187
HELLER, W. D. — LINDENBERG, H. — NUSKE, M. —	
SCHRIEVER, K.-H.: Beschreibende Statistik. Mit	
vollständig gelösten Aufgaben	315
HLAWKA, E.: Theorie der Gleichverteilung	507
HENRICI, P.: Applied and Computational Complex Ana-	
lysis. Vol. 2	443
JAKOBS, K.: Selecta Mathematica V	443
KELLY, P. J. — WEISS, M. L.: Geometry and Con-	
vexity. A Study in Mathematical Methods	254
KLAUA, D.: Mengenlehre.	254
KLINE, M.: Mathematics: The Loss of Certainty . .	508
LANG, S.: Algebraische Strukturen	381
LINGENBERG, R.: Metric Planes and Metric Vector	
Spaces	187
MENNINGER, K.: Ali Baba und die 39 Kamele. 10. Aufl.	381
MEYER, K.: Anwendungsaufgaben im Mathematik-	
unterricht. Aufgabensammlung mit Lösungen. Bd. 1:	
Algebra und Geometrie	316
MÜLLER, G.: Problemlösung und Programmierung. .	316
NOACK, S.: Statistische Auswertung von Meß- und	
Versuchsdaten mit Taschenrechner und Tischcom-	
puter	381
ODIER, M. — ROUSSEL, Y.: Trioker, mathematisch ge-	
spielt	254
RAUTENBERG, W.: Reelle Zahlen in elementarer Dar-	
stellung	380
— Klassische und nichtklassische Aussagelogik . . .	444
SCHUMNY, H.: Taschenrechner und Mikrocomputer	
Jahrbuch 1980	62
THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA (Hrsg.):	
The Raimond W. Brink Selected Mathematical Pa-	
pers. Vol. 1: Selected Papers on Precalculus . . .	61
TIETZ, H.: Einführung in die Mathematik für Inge-	
nieure I, II	444

Physik

BETHGE, K.: Quantenphysik	255
BLUMENTRITT, G. — SCHWAAR, L.: Kerntechnik im Blickpunkt	509
Bürgel, E.: Neue Normen und Schaltzeichen der digi- talen Informationsverarbeitung	188
EDER, G.: Atomphysik. Quantenmechanik II	62
FARBER, M.-U. (Hrsg.): Jahrbuch der Schulphysik. Bd. 3	381
GINSBURG, W. L.: Über Physik und Astrophysik. Aus- gewählte fundamentale Probleme	509
GONDOLATSCH, F. — GROSCHOFF, G. — ZIMMER- MANN, O.: Astronomie II. Fixsterne und Stern- systeme	445
GRAEWE, H.: Atomphysik. Grundlagen — Atomhülle — Atomkern. 3. Aufl.	382
HILL, H. — NIKOLAUS, F.: Physik in Versuchen und Gesetzen. 3. Aufl.	445
HÖFLING, O. — MIROW, B. — BECKER, G.: Physik-Auf- gaben. Klausur-Ausgabe	444
KLEIN, P. E.: Das Oszilloskop. Eine Einführung in die Schaltungstechnik sowie ihre praktische Anwendung	188
KRÖNERT, R. (Hrsg.): Wörterbuch der Elektronik . . .	62
LEUSCHNER, D.: Grundbegriffe der Thermodynamik .	316
LIEBSCHER, D.-E.: Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal	317
MELCHER, H.: Albert Einstein wider Vorurteile und Denkgewohnheiten	445
MILER, M.: Optische Holographie. Theoretische und experimentelle Grundlagen und Anwendungen. 2. Aufl.	317
NAYFEH, A. H. — MOOK, D. T.: Nonlinear Oscillations	509
PIETSCH, H.-J.: Kurzwellen-Amateurfunktechnik . .	317
SEIFRITZ, W.: Sanfte Energietechnologie — Hoffnung oder Utopie?	188
SPROCKHOFF, G.: Physikalische Schulversuche . . .	509
STEIDLE, H.-G.: Vergleichstabelle für japanische Tran- sistoren	316
SZABÓ, I.: Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen. 2. Aufl.	317
THIRRING, W.: Lehrbuch der Mathematischen Physik. Bd. 3: Quantenmechanik von Atomen und Mole- külen	188
TOWERS, T. D.: Towers internationale FET-Vergleichs- liste.	255

WEDEGÄRTNER, K.: Zur Situation des Unterrichts im Fach Physik/Chemie an der Hauptschule in Nord- rhein-Westfalen. Ergebnisse einer Untersuchung 1977	382
WENINGER, J. — BRÜNGER, H.: Atommodelle im natur- wissenschaftlichen Unterricht. Bd. 1: Bericht über eine IPN-Arbeitstagung	381

Chemie

ARNI, A.: Elementare Organische Chemie. Program- miertes Arbeitsbuch für den Anfängerunterricht und das Selbststudium	255
BRINKMANN, H.: Rechnen mit Größen in der Chemie .	318
DEMUTH, R. — KOBER, F.: Komplexchemie — experi- mentell	446
FRANCK, H.-G. — KNOP, A.: Kohleveredlung, Chemie und Technologie.	382
KAMP, H.: Organische Stereochemie. Einführung mit Übungen	445
KULLBACH, W.: Mengenberechnungen in der Chemie .	318
MERKEL, E.: Die SI-Einheiten in der chemischen Praxis	189
MEYER, V.: Praxis der Hochleistungs-Flüssigkeitschro- matographie	63
MOTTANA, A. — CRESPI, R. — LIBORIO, G.: Der große BLV Mineralienführer, Gesteine und Mineralien in 576 Farbfotos.	446
NÖDING, S. — FLOHR, F.: Methodik, Didaktik und Praxis des Chemieunterricht	510
RINCK, G.: Einführung in die Kunststoffchemie . . .	63
STEINERT, H.: Erdbeben	255
VOSSEN, H.: Kompendium Didaktik — Chemie . . .	189
WINKLER, H. G.: Reaktionskinetik	445
WITTKÉ, G.: Farbstoffchemie	383
WOLFF, W. — SCHWAHN, M.: Sicherheit im Labor — einrichten — experimentieren — entsorgen	510

Biologie

BAYRHUBER, H. — SCHAEFER, G.: Kybernetische Bio- logie	191
BLECKMANN, H. — BERCK, K.-H. — SCHWAB, CH.: Un- terrichtseinheit Naturschutz	190
BÖSEL, R.: Signalverarbeitung in Nervennetzen . . .	256
HEGI, G.: Illustrierte Flora von Mitteleuropa. . . .	319

KAPPERT, H.: Vier Jahrzehnte miterlebte Genetik . . .	319	SCHWOERBEL, J.: Einführung in die Limnologie. 3. Aufl.	191
KUCHENBECKER, D.: Naturwissenschaftlicher Unterricht in der UdSSR. Studien zur Bildungsforschung .	191	TROMMER, G. — WENK, K.: Leben in Ökosystemen. — Leitthemen 1/78	511
LANGE, P. — WÖHRMANN, K.: Genetisches Grundpraktikum	512	WINKEL, G. u. a.: Humanethologie und Schulorganisation	446
LINNERT, G. — BEEK, B. — ORE, G. — SPERLING, K.: Cytogenetisches Praktikum	256		
MENGEL, K.: Ernährung und Stoffwechsel der Pflanze. 5. Aufl.	384		
MOHR, H. — SCHOPFER, P.: Lehrbuch der Pflanzenphysiologie. 3. Aufl.	320		
REINERT, G.-B.: Verhaltenslehre	383		
SCHMIDT, H.: Tierkunde	319		

Allgemeines

BECK, H.: Kulturphilosophie der Technik.	448
BELLERATE, B. M.: J. F. Herbart und die Begründung der wissenschaftlichen Pädagogik in Deutschland. .	447
WUKETITS, F. M.: Kausalitätsbegriff und Evolutionstheorie.	191

MNU Jahrgang 34 (1981). Hefteinteilung

Heft	erschienen	Seiten	Heft	erschienen	Seiten
1	15. 1.	1— 64	5	15. 7.	257—320
2	01. 3.	65—128	6	01. 9.	321—384
3	15. 4.	129—192	7	15. 10.	385—448
4	01. 6.	193—256	8	01. 12.	449—512

Aus der Schulpraxis · Für die Schulpraxis

»Dreiecks«-Ungleichungen für Tetraeder

VON RUDOLF FRITSCH

Mit 1 Abbildung

In den Lehrplänen für die Leistungskurse Lineare Algebra/Analytische Geometrie ist eine z. T. sehr ausführliche Behandlung des inneren Produkts vorgesehen, bis hin zum Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren¹). Es besteht aber kein Zweifel darüber, daß das innere Produkt in der Schule kein selbständiges

Interesse beanspruchen kann, sondern nur im Hinblick auf interessante Anwendungen eingeführt werden sollte, bei denen die bereitgestellten Methoden genutzt werden und die vor allem das räumliche Vorstellungsvermögen der Schüler fördern. Dabei verdient das Tetraeder als 3dimensionales Analogon des Drei-

ecks besonderes Interesse (s. etwa auch den Beitrag von Tietz [6]). Wir geben nachstehend zwei Beispiele aus der »Tetraedrometrie«, die einerseits den Begriff des inneren Produkts in seiner ganzen Tragweite benötigen, aber andererseits mit den in den Lehrplänen zur Verfügung stehenden Mitteln dargestellt werden können.

1. Einleitung

Es handelt sich um zwei verschiedene Verallgemeinerungen der Dreiecksungleichung. Die Dreiecksungleichung liefert ein Kriterium dafür, daß drei gegebene positive reelle Zahlen als Seitenlängen eines Dreiecks auftreten. Man kann nun einerseits fragen, wann sechs vorgegebene positive reelle Zahlen als Kantenlängen eines Tetraeders möglich sind, und andererseits eine Bedingung an vier positive reelle Zahlen dafür suchen, daß sie als Seitenflächen eines Tetraeders vorkommen.

Unsere Überlegungen spielen sich im \mathbb{R}^3 ab. Wir bezeichnen mit e_1, e_2, e_3 , die kanonische Basis des \mathbb{R}^3 und mit $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ das kanonische Skalarprodukt der Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} , d. h.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Über allgemeine innere Produkte benötigen wir die folgenden Tatsachen (s. z. B. [3]): Ist $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ eine beliebige Basis des \mathbb{R}^3 und $M = (m_{ij})$ eine reelle $(3, 3)$ -Matrix, so gibt es genau eine bilineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = m_{ij}.$$

(Anstelle von $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ werden wir im folgenden kurz $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ schreiben). Die Abbildung f ist ein inneres Produkt, wenn die Matrix M symmetrisch und positiv definit ist. Die letztgenannte Eigenschaft prüft man mit dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren. Jedes innere Produkt führt zu einer Längenfunktion $l: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$l(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}},$$

und aus der sich das innere Produkt zurückgewinnen läßt:

$$l(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = l(\mathbf{x})^2 - 2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + l(\mathbf{y})^2,$$

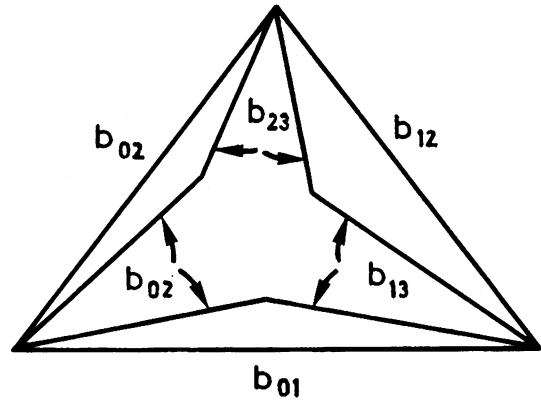


Abb. 1

d. h.

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{2} (l(\mathbf{x})^2 + l(\mathbf{y})^2 - l(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2).$$

Für das kanonische Skalarprodukt notieren wir noch die wichtige und anschauliche Beschreibung des Betrages:

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = l(\mathbf{x}) \cdot l(\text{Projektion von } \mathbf{y} \text{ auf } \mathbf{x}).$$

2. Tetraeder mit vorgegebenen Kantenlängen

Seien nun 6 positive reelle Zahlen $b_{ij} = b_{ji}$ für $0 \leq i < j \leq 3$ gegeben; wir setzen noch $b_{ii} = 0$ für $0 \leq i \leq 3$. Es geht uns um die Existenz eines Tetraeders mit den Ecken $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$, so daß b_{ij} gerade den Abstand von \mathbf{b}_i und \mathbf{b}_j angibt, ein Problem, das auch für die Statistik Bedeutung erlangt hat [1]. Man könnte zunächst vermuten, daß die offensichtlich notwendige Bedingung »Je drei Größen, die zusammen die Seitenlängen eines Randdreiecks bilden, erfüllen die entsprechende Dreiecksungleichung« auch hinreichend ist ([1], [5]). Aus der Abbildung 1 sieht man jedoch unmittelbar, wie man aus sechs Größen vier Dreiecke bilden kann, die sich nicht zum Rand eines Tetraeders zusammensetzen lassen. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Kantenlängen eines Tetraeders, die wir jetzt herleiten wollen, wurde von M. FIEDLER in [2] angegeben, allerdings in einer Form, in der sie in der Schule nicht erarbeitet werden kann²⁾.

Zunächst sei ein Tetraeder mit den gewünschten Eigenschaften gegeben. Ohne wesentliche Einschränkung können wir dabei $\mathbf{b}_0 = \mathbf{o}$ annehmen. Die Ecken $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ bilden dann eine Basis des \mathbb{R}^3 , bezüglich deren

¹⁾ Im Lehrplan von Baden-Württemberg vom Januar 1977 ist das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren zwar nicht explizit erwähnt, aber es wird als Lernziel verlangt: »Entscheiden können, ob eine vorgegebene Abbildung $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Skalarmultiplikation ist«. Das muß doch wohl mit diesem Verfahren geschehen, da das Kriterium der Positivität der Hauptminoren sicher nicht für den Gymnasialunterricht geeignet ist.

²⁾ Die zitierte Arbeit von FIEDLER ist eine wahre Fundgrube für hübsche Sätze aus der Tetraedrometrie; leider ist sie nur schwer zugänglich, weil sie in tschechischer Sprache abgefaßt ist.

das kanonische innere Produkt nach der vorherigen Theorie durch die Matrix $M = (m_{ij})$ mit

$$m_{ij} = \frac{1}{2}(b_{oi}^2 + b_{oj}^2 - b_{ij}^2)$$

induziert ist. Also muß diese Matrix positiv definit sein, was eine weitere notwendige Bedingung ergibt. Diese Bedingung ist aber nun auch hinreichend. Sind die reellen Zahlen b_{ij} so gegeben, daß die Matrix $M = (m_{ij})$ positiv definit ist, so bestimmt man zunächst mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis e_1, e_2, e_3 von \mathbb{R}^3 bezüglich des inneren Produktes \cdot_M , gebildet über der kanonischen Basis von \mathbb{R}^3 . Die lineare Abbildung $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die gegeben ist durch

$$g(e_i) = e_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq 3,$$

ist dann eine Isometrie $(\mathbb{R}^3, \cdot_M) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \cdot)$, d. h. für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$x \cdot_M y = g(x) \cdot g(y).$$

Man setzt nun

$$b_i = g(e_i) \quad \text{für } 1 \leq i \leq 3$$

und erhält

$$b_i \cdot b_i = e_i \cdot e_i = m_{ii} = b_{oi}^2,$$

d. h. $l(b_i) = b_{oi}$, und

$$\begin{aligned} (b_i - b_j)^2 &= b_i^2 - 2b_i \cdot b_j + b_j^2 \\ &= b_{oi}^2 - 2e_i \cdot e_j + b_{oj}^2 = b_{ij}^2, \end{aligned}$$

d. h. $l(b_i - b_j) = b_{ij}$.

Also hat das Tetraeder $b_0 = o, b_1, b_2, b_3$ die gewünschten Kantenlängen.

Damit haben wir die folgende Verallgemeinerung des durch die Dreiecksungleichung beschriebenen ebenen Sachverhalts bewiesen:

Zu sechs positiven reellen Zahlen b_{ij} , $0 \leq i < j \leq 3$, gibt es in \mathbb{R}^3 genau dann ein Tetraeder mit den Ecken b_0, b_1, b_2, b_3 und den Kantenlängen

$$l(b_i - b_j) = b_{ij}, \quad 0 \leq i < j \leq 3,$$

wenn die Matrix $M = (m_{ij})$ mit

$$m_{ij} = \frac{1}{2}(b_{oi}^2 + b_{oj}^2 - b_{ij}^2), \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

positiv definit ist. (Dabei ist $b_{ij} := b_{ji}$ für $1 \leq j < i \leq 3$ und $b_{ii} := 0$ für $1 \leq i \leq 3$.)

Um den Rechenaufwand zu demonstrieren, sei noch Beispiel mit konkreten Zahlen durchgerechnet. Wir wählen

$$b_{01} = 4, \quad b_{02} = b_{03} = 5, \quad b_{12} = b_{13} = b_{23} = 3.$$

Damit ergibt sich

$$M = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 16 \\ 16 & 25 & 20,5 \\ 16 & 20,5 & 25 \end{pmatrix}.$$

Das Orthonormalisierungsverfahren liefert:

$$e_1 \cdot_M e_1 = 16 \Rightarrow l_M(e_1) = 4 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e_2 \cdot_M c_1 = 4 \Rightarrow e_2 - 4c_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$l_M \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3 \cdot_M c_1 = 4, \quad e_3 \cdot_M c_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow e_3 - 3c_1 - \frac{3}{2}c_2$$

$$= \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow l_M \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$c_3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nun drücken wir die e_i durch die c_i aus

$$e_1 = 4c_1$$

$$e_2 = 4c_1 + 3c_2$$

$$e_3 = 4c_1 + \frac{3}{2}c_2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}c_3$$

und erhalten das gesuchte Tetraeder mit den Ecken

$$b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1,5 \\ 1,5\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

3. Tetraeder mit vorgegebenen Maßzahlen für die Seitenflächen

Wenden wir uns nun den Seitenflächen zu. Wir wollen eine in [4: Theorem 5.1] angegebene Bedingung herleiten, die zwar sehr einfach zu formulieren ist, aber doch etwas Aufwand mit mehreren anschaulich-geometrischen Einsichten erfordert. Seien a_0, a_1, a_2, a_3 reelle Zahlen, von denen wir ohne wesentliche Einschränkung

$$0 < a_3 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0 \quad (1)$$

annehmen können. Haben wir ein Tetraeder mit diesen Zahlen als Seitenflächen, so stellen wir es auf die Seite mit der Fläche a_0 und projizieren die ganze Figur senkrecht auf die Grundebene. Dann sieht man unmittelbar die Notwendigkeit der Ungleichung

$$a_0 < a_1 + a_2 + a_3. \quad (2)$$

Zum Nachweis, daß diese Ungleichung auch hinreichend ist, stellen wir zunächst eine Vorüberlegung an. Seien $\mathbf{b}_0 = \mathbf{o}$, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ die Ecken eines Tetraeders T und $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ die zugehörigen Höhenfußpunkte. Für $0 \leq i \leq 3$ bezeichne f_i das positive Vielfache des Vektors $\mathbf{h}_i - \mathbf{b}_i$ mit der Länge a_i . Ferner sei v das Volumen des Tetraeders. Dann gelten die folgenden Gleichungen:

$$f_0 \cdot \mathbf{b}_j = 3v \quad \text{für } 1 \leq j \leq 3$$

(die Länge von f_0 ist a_0 , die Länge der Projektion von \mathbf{b}_j auf f_0 ist $l(\mathbf{h}_0)$, die Länge der zugehörigen Höhe des Tetraeders),

$$f_i \cdot \mathbf{b}_j = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 3, j \neq i,$$

(für diese Indizes i, j ist f_i senkrecht zu \mathbf{b}_j), und

$$f_i \cdot \mathbf{b}_i = -3v \quad \text{für } 1 \leq i \leq 3.$$

(f_i hat die Länge a_i , die Projektion von \mathbf{b}_i auf f_i hat die zugehörige Höhe als Länge und ist entgegengesetzt zu f_i gerichtet.) Damit berechnet man

$$(f_0 + f_1 + f_2 + f_3) \cdot \mathbf{b}_i = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq 3.$$

Da nur der Nullvektor auf dem ganzen \mathbb{R}^3 senkrecht steht, folgt

$$f_0 + f_1 + f_2 + f_3 = \mathbf{o}. \quad (3)$$

Das ist eine für sich interessante Gleichung, die außerdem den Schlüssel zur Konstruktion eines Tetraeders mit gewünschten Seitenflächen liefert [4].

Dazu bemerken wäre zunächst noch, daß keine drei der Vektoren f_0, f_1, f_2, f_3 linear abhängig sind, d. h. in einer Ebene liegen. Wären nämlich etwa f_0, f_1, f_2 linear abhängig, so wären die Kanten $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_3)$, $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3)$, $(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ des Tetraeders parallel und könnten nicht in \mathbf{b}_3 zusammenlaufen. Damit läßt sich zeigen, daß das Tetraeder T aus den Vektoren f_0, f_1, f_2, f_3 zurückgewonnen werden kann. Wir bestimmen zunächst einen Vektor $\tilde{\mathbf{b}}_1$ als eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} f_0 \cdot \tilde{\mathbf{b}}_1 &= 1 \\ f_2 \cdot \tilde{\mathbf{b}}_1 &= 0 \\ f_3 \cdot \tilde{\mathbf{b}}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

und notieren als Folgerung aus (3)

$$f_1 \cdot \tilde{\mathbf{b}}_1 = -f_0 \cdot \tilde{\mathbf{b}}_1 = -1. \quad (5)$$

Analog finden wir $\tilde{\mathbf{b}}_2$ und $\tilde{\mathbf{b}}_3$. Bezeichnen wir nun mit \tilde{v} das Volumen des von $\tilde{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{o}, \tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_3$ aufgespannten Tetraeders \tilde{T} und mit $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3$ dessen Seitenflächen, so finden wir für die Höhen dieses Tetraeders nach (4)

$$\frac{3\tilde{v}}{\tilde{a}_0} = \frac{1}{a_0},$$

da die Projektion von $\tilde{\mathbf{b}}_i$ auf \tilde{f}_0 gerade die 0te Höhe von \tilde{T} liefert, bzw. nach (5)

$$\frac{3\tilde{v}}{\tilde{a}_i} = \frac{1}{a_i} \quad \text{für } 1 \leq i \leq 3,$$

da sich die i -te Höhe von \tilde{T} als die Länge der Projektion von $\tilde{\mathbf{b}}_i$ auf \tilde{f}_i ergibt.

Damit hat man

$$a_i = \frac{\tilde{a}_i}{3\tilde{v}} \quad \text{für } 0 \leq i \leq 3,$$

d. h. das ursprüngliche Tetraeder T ergibt sich aus \tilde{T} durch zentrische Streckung von $\mathbf{o} = \mathbf{b}_0 = \tilde{\mathbf{b}}_0$ aus mit dem Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{3\tilde{v}}}.$$

Diese Überlegung zeigt auch, daß es zur Konstruktion eines Tetraeders mit vorgeschriebenen Seitenflächen a_0, a_1, a_2, a_3 genügt, Vektoren f_i für $0 \leq i \leq 3$ so zu bestimmen, daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

$$(a) \quad l(f_i) = a_i \quad \text{für } 0 \leq i \leq 3.$$

$$(b) \quad f_0 + f_1 + f_2 + f_3 = \mathbf{o}.$$

(c) Je drei der Vektoren f_i sind linear unabhängig.

Dazu seien $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ so gegeben, daß die Ungleichungen (1) und (2) erfüllt sind. Damit konstruiert man sich zunächst ein ebenes Viereck mit den Seiten a_0, a_1, a_2, a_3 , was auf Grund der Ungleichungen offensichtlich möglich ist. Indem man ein Teildreieck dieses Vierecks etwas um die entsprechende Diagonale dreht, erhält man ein nichtebenes Viereck mit den gleichen Seitenlängen. Die Ecken dieses Vierecks seien $\mathbf{c}_0 = \mathbf{o}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$. Wir setzen nun

$$f_0 = \mathbf{c}_1, f_1 = \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1, f_2 = \mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_2, f_3 = -\mathbf{c}_3.$$

Für diese Vektoren f_i sind von den geforderten Eigenschaften die ersten beiden, (a) und (b), offensichtlich erfüllt. Da das Viereck $(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ nicht eben ist, sind die Vektoren $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ linear unabhängig, woraus sich nun leicht auch die Eigenschaft (c) ergibt. Damit sind wir am Ziel. Unser Ergebnis ist also eine »Vierecks«-Ungleichung:

Sind a_0, a_1, a_2, a_3 positive reelle Zahlen mit

$$a_3 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0,$$

so gibt es genau dann ein Tetraeder, dessen Seitendreiecke die Flächen $a_i, 0 \leq i \leq 3$ haben, wenn gilt

$$a_0 < a_1 + a_2 + a_3.$$

Zum Abschluß wollen wir auch hierfür ein konkretes Beispiel durchrechnen. Wir wählen

$$a_0 = 2625, a_1 = 1365, a_2 = 1365, a_3 = 735.$$

Als nichtebenes Viereck mit den Kantenlängen a_i wählen wir

$$c_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1 = \begin{pmatrix} 2520 \\ 735 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1260 \\ 735 \\ 525 \end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 735 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ergeben sich die f_i zu

$$f_0 = \begin{pmatrix} 2520 \\ 735 \\ 0 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} -1260 \\ 0 \\ 525 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -1260 \\ 0 \\ -525 \end{pmatrix},$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -735 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die b_i , $1 \leq i \leq 3$, berechnen wir aus linearen Gleichungssystemen:

$$\begin{array}{rcl} 2520x + 735y & = & 1 \\ -1260x & -525z = 0 \Rightarrow \tilde{b}_1 = & \begin{pmatrix} 1 \\ 2520 \\ 0 \\ 1 \\ -1050 \end{pmatrix} \\ -735y & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2520x + 735y & = & 1 \\ -1260x & +525z = 0 \Rightarrow \tilde{b}_2 = & \begin{pmatrix} 1 \\ 2520 \\ 0 \\ 1 \\ 1050 \end{pmatrix} \\ -735y & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2520x + 735y & = & 1 \\ -1260x & +525z = 0 \Rightarrow \tilde{b}_3 = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 735 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -1260x & -525z = 0 & \end{array}$$

Das von $\tilde{b}_0 = b_0 = o$, \tilde{b}_1 und \tilde{b}_2 aufgespannte Dreieck hat die Fläche $(15 \cdot 420^2)^{-1}$. Also ist das Flächenverhältnis zwischen dem gesuchten Tetraeder und dem Tetraeder $\tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$

$$735 \cdot 420^2 \cdot 15 = (105 \cdot 420)^2.$$

Damit finden wir schließlich b_1, b_2, b_3 durch Streckung um den Faktor $105 \cdot 420$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 0 \\ -42 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 0 \\ 42 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Literatur

- [1] H. DRYGAS: Über multidimensionale Skalierung. – Statist. Hefte (N. F.) **19** (1978) 63–66.
- [2] M. FIEDLER: Geometrie simplexu v E_n (první část). – Casopis Pest. Mat. **79** (1954) 297–320.
- [3] R. FRITSCH: Eine geometrische Hinführung zum inneren Produkt. – DdM **8** (1980) 133–147.
- [4] L. GERBER: The orthocentric simplex as an extreme simplex. – Pacific J. Math. **56** (1975) 97–111.
- [5] A. KIRSCH: Bemerkung zu K. Drygas, »Über multidimensionale Skalierung«. – Stat. Hefte (N. F.) **19** (1978) 211–212.
- [6] H. TIETZ: Die Raumhöhen des Tetraeders. – MNU **25** (1972) 19–20.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. R. Fritsch, Universität Konstanz, Fakultät für Mathematik, Postfach 5560, 7750 Konstanz